COBEM 99
XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica
15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering
22 - 26 de Novembro de 1999 / November 22 - 26, 1999 Águas de Lindóia, São Paulo,

# TRATAMENTO DE SISTEMAS COM AMORTECIMENTO NÃO PROPORCIONAL NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

**Zacarias M. Chamberlain Pravia**
Faculdade de Engenharia e Arquitetura, Universidade de Passo Fundo
Campus Bairro São José, Passo Fundo, RS, Brasil, 99001-970

***Resumo.*** *Sistemas dinâmicos com amortecimento proporcional podem ser tratados, para avaliar seu comportamento no domínio do tempo ou no domínio da freqüência. Quando o amortecimento não é proporcional a massa e/ou rigidez, a solução do sistema é tratada de maneira mais rigorosa se for no domínio da freqüência. O presente trabalho apresenta uma alternativa para tratar sistemas dinâmicos com amortecimento não proporcional no domínio da freqüência, usando para tal uma estratégia iterativa de pseudo forças e mudando a base do sistema para coordenadas modais no domínio da freqüência. A formulação teórica é apresentada, assim como um exemplo que valida sua aplicação para sistemas dinâmicos semelhantes.*

***Palavras-chave:*** *Amortecimento não proporcional, dinâmica, resposta na freqüência*

## 1. INTRODUÇÃO

Os métodos para análise dinâmica de sistemas classificam-se de maneira geral em métodos no domínio do tempo e métodos no domínio da freqüência. No domínio do tempo os sistemas dinâmicos podem ser resolvidos por integração explícita ou através de superposição modal. Os métodos de solução no domínio da freqüência são baseados nas transformadas de Fourier, e especificamente nos casos em que o carregamento não é de caracter harmônico utiliza-se a transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform – FFT).

Para sistemas com comportamento não linear dinâmico, os métodos de integração explícita no tempo são os mais usados. Quando o amortecimento apresenta comportamento dependente da freqüência, a resposta do sistema é tratada de maneira mais precisa se for analisado no domínio da freqüência.

Claret & Venâncio(1991) apresentam uma alternativa para análise de sistemas dinâmicos com amortecimento não proporcional usando a ImFT (Implicit Fourier Transform). Esses mesmos autores (Claret & Venâncio,1996) sugerem a aplicação no domínio da freqüência para problemas dinâmicos relacionados a interação solo estrutura. (Ibrahimbegovic & Wilson,1989) sugerem uma alternativa no domínio da freqüência utilizando superposição modal, através de uma base de modos do tipo Raleigh-Ritz.

Apresenta-se neste trabalho uma alternativa geral para sistemas dinâmicos com amortecimento não proporcional, usando a FFT e resolvendo o sistema no domínio da freqüência, transformado através de uma base modal completa considerando todos os graus de liberdade modal, por iterações que convergem de maneira rápida. A formulação matemática da metodologia é apresentado, assim como também o seu algoritmo. Para validar a proposta apresenta-se um sistema com dois graus de liberdade com amortecimento não proporcional, resolvido pela metodologia aqui proposta e estes resultados são comparados a uma análise exata. Os resultados obtidos oferecem um alternativa simples para a obtenção da resposta de sistemas dinâmicos com amortecimento não proporcional.

## 2. FORMULAÇÃO TEÓRICA

Para um sistema com $n$ graus de liberdade a equação de equilíbrio dinâmico pode ser expressa por

$$[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{p(t)\} \tag{1}$$

Onde $[m]$, $[c]$ e $[k]$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente. $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ e $\{x(t)\}$ são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento respectivamente. Para converter a Eq. (1) no domínio da freqüência aplica-se a transformada de Fourier em ambos membros da equação, usando as propriedades da transformada e fazendo

$$F[\{x(t)\}]=\{X(\omega)\} \tag{2a}$$
$$F[p(t)]=\{P(\omega)\} \tag{2b}$$

A Eq. (1) no domínio da freqüência

$$(-\omega^2[m]+i\omega[c]+[k])\{X(\omega)\}=\{P(\omega)\} \tag{3}$$

Resolvendo o problema de autovalor $([k]-[\Omega][m])[\Phi]=\{0\}$ obtém-se a matriz $[\Omega]$ que será usada para transformar a Eq. (3) para sua forma modal no domínio da freqüência. Para realizar essa transformação usa-se a transformação

$$\{X(\omega)\}=[\Phi]\{Y(\omega)\} \tag{4}$$

Normalizando a matriz de autovetores $[\Phi]$ em relação à massa, sendo que para matrizes de massa diagonalizadas cada autovetor fica normalizado pelas seguintes operações

$$\{\hat{\phi}_k\}=\frac{\{\phi_k\}}{M_k^{1/2}} \tag{5a}$$

$$M_k=\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,n}^2 m_i \tag{5b}$$

Usando as propriedades da matriz modal normalizada $[\Phi]$ em relação à massa e sabendo que

$$[\hat{\Phi}]^t[m][\hat{\Phi}]=[I] \tag{6a}$$
$$[\hat{\Phi}]^t[k][\hat{\Phi}]=[\Omega] \tag{6b}$$

$$[\hat{\Phi}]^t[c][\hat{\Phi}]=[C] \tag{6c}$$

Pode-se substituir a transformação dada pela Eq. (4) na Eq. (2), e ainda premultiplicando pela transposta de $[\hat{\Phi}]^t$ obtém-se

$$-\omega^2[\hat{\Phi}]^t[m][\hat{\Phi}]+i\omega[\hat{\Phi}]^t[c][\hat{\Phi}]+[\hat{\Phi}]^t[k][\hat{\Phi}]=[\hat{\Phi}]^t\{P(\omega)\} \tag{7}$$

Substituindo as Eq. (6) na Eq. (7), e fazendo $[\hat{\Phi}]^t\{P(\omega)\}=\{\overline{P}(\omega)\}$ obtém-se a equação dinâmica de equilíbrio na forma modal no domínio da freqüência

$$(-\omega^2[I]+i\omega[C]+[\Omega])\{Y(\omega)\}=\{\overline{P}(\omega)\} \tag{8}$$

A resposta modal no domínio da freqüência é trivial quando o amortecimento é proporcional a massa, a rigidez, ou a ambas, já que $[C]$ e $[\Omega]$ são matrizes diagonais, portanto a resposta é fornecida pelas seguintes equações

$$\{Y(\omega)\}=[H(\omega)]\{\overline{P}(\omega)\} \tag{9a}$$
$$[H(\omega)]=(-\omega^2[I]+i\omega[C]+[\Omega])^{-1} \tag{9b}$$

No caso do amortecimento não proporcional, a matriz $[C]$ não é mais uma matriz diagonal, porém pode ser decomposta em duas matrizes, uma contendo os termos da diagonal $[C_D]$ e outra os termos fora da diagonal $[C_{FD}]$. Fazendo as devidas alterações na Eq. (8) temos:

$$(-\omega^2[I]+i\omega([C_D]+[C_{FD}])+[\Omega])\{Y(\omega)\}=\{\overline{P}(\omega)\} \tag{10}$$

Passando o matriz que contém os termos fora da diagonal do amortecimento para o membro direito da Eq. (10), temos:

$$(-\omega^2[I]+i\omega[C_D]+[\Omega])\{Y(\omega)\}=\{\overline{P}(\omega)\}-i\omega[C_{FD}]\{Y(\omega)\} \tag{11}$$

O segundo termo do membro direito da Eq. (11) pode ser considerado como uma pseudo força, podendo-se propor uma solução iterativa dessa equação através da seguintes expressões:

$$\{Y^k(\omega_n)\}=[\overline{H}(\omega_n)](\{\overline{P}(\omega_n)\}-i\omega_n[C_{FD}]\{Y^{k-1}(\omega_n)\}) \tag{12a}$$
$$[\overline{H}(\omega_n)]=(-\omega_n^2[I]+i\omega_n[C_D]+[\Omega])^{-1} \tag{12b}$$

A inversão do membro direito da Eq. (12b) é trivial já que é uma matriz diagonal. Para cada freqüência $\omega_n$, considerando inicialmente que $\{Y^0(\omega)\}=\{0\}$, itera-se as Eq. (12) até que

$$\left|\frac{\{Y^{k-1}(\omega_n)\}-\{Y^k(\omega_n)\}}{\{Y^k(\omega_n)\}}\right|\leq\varepsilon\,, \tag{13}$$

sendo $\varepsilon$ um número positivo muito pequeno para controlar a convergência da iteração.

A resposta no domínio do tempo obtém-se multiplicando primeiro a matriz modal normalizada pela resposta modal no domínio da freqüência, a este resultado aplica-se a inversa da transformada de Fourier. No caso geral usam-se as transformadas rápidas de Fourier.

## 3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO

### 3.1 Introdução e Dados

Para exemplificar e validar o método exposto aqui, apresenta-se um modelo de dois graus de liberdade, sendo que seus dados podem ser observados na Fig. (1). Os amortecimentos para cada um dos graus de liberdade são expostos na Fig. (2).

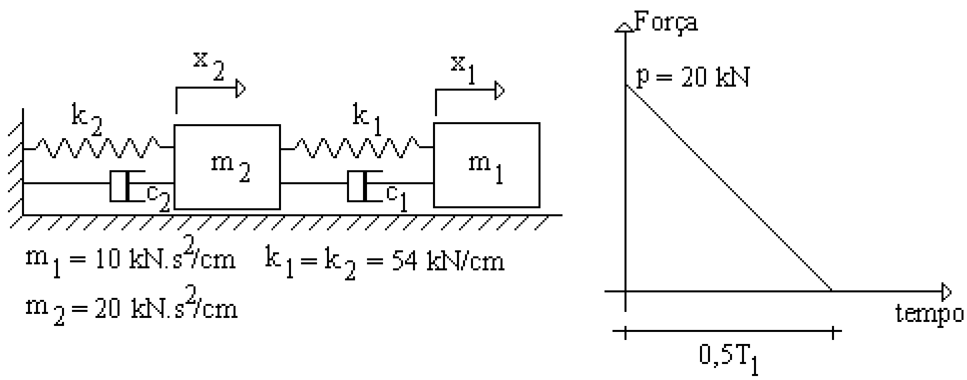


Figura 1 – Dados do modelo analisado

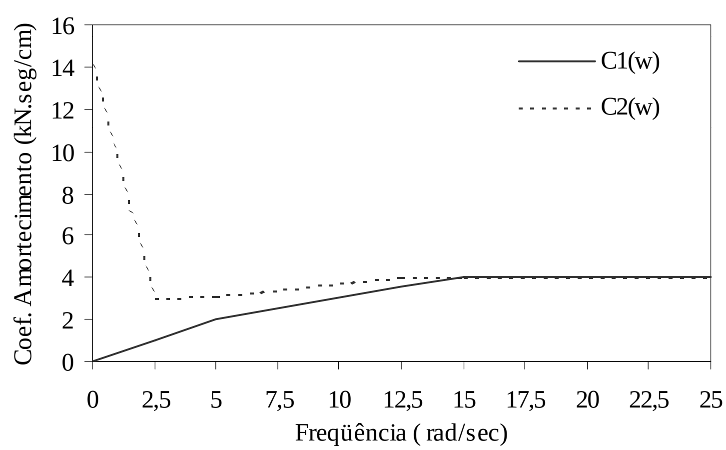


Figura 2 – Valor dos amortecimentos para o sistema de dois graus de liberdade exemplo

A solução numérica foi implementada para testes inicias no programa computacional MAPLE V Release 4.0, (Monagan et Al.,1996)e (Redfern,1996), num computador com sistema operacional Windows 95 e 32MB de RAM. Posteriormente foi desenvolvido um programa em linguagem C para resolver vários exemplos, dentro os quais aquele aqui apresentado.

Para comparar a qualidade da resposta para o exemplo aqui exposto, foi implementada a inversão exata no MAPLE da Eq. (10), para ser comparada com a solução iterativa dada pela Eq. (12) e (13). A força foi aplicada a transformada rápida de Fourier numa amostra de 1024 pontos, para o qual a força impulsiva triangular mostrada na Fig. (1) é discretizada num tempo total de 25 segundos, sendo que a força atua apenas num tempo de 2,5 segundos, ou seja $\Delta t = 0{,}02$ segundos e $\Delta\omega = 0{,}25$ rad/seg.

Para evitar condições espúrias no tratamento da força foi considerado um período estendido para obtenção da força no domínio da freqüência.

Nos cálculos onde a inversa da matriz é feita diretamente, e no método iterativo as condições de intervalo de freqüência foram as mesmas. Para o método iterativo usou-se uma valor de 0,001 para $\varepsilon$ .

## 3.1 Resultados

Na Fig. (3) apresenta-se uma comparação entre a solução exata e a iterativa para o grau de liberdade $x_1(t)$ no domínio do tempo, essa mesma comparação pode ser observada na Fig. (4) para o grau de liberdade $x_2(t)$. As respostas para a solução exata e a iterativa, no tempo, apresentam-se semelhantes.

Na solução do método iterativo, o número médio de iterações para obter a convergência em cada freqüência $\omega_n$ foi de 4. O método iterativo para tratar sistemas dinâmicos com amortecimento não proporcional apresenta vantagens, já que não são realizadas inversões de matrizes, reduzindo o número de operações em relação a solução exata, e ainda apresenta vantagens computacionais para análise no domínio do tempo seja em tempo computacional como também na qualidade da resposta do sistema.

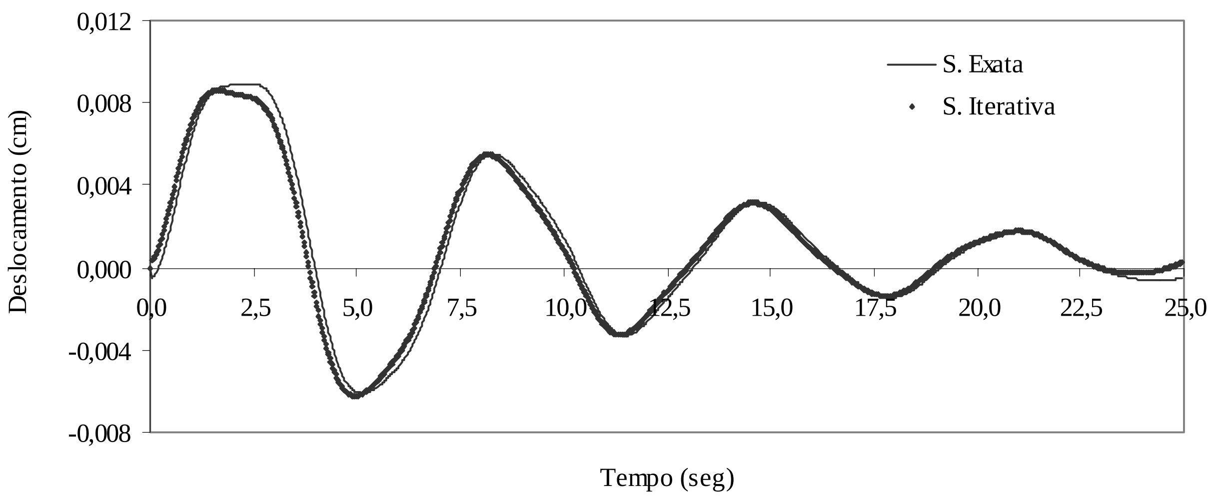


Figura 3: Deslocamento no tempo de $x_1(t)$

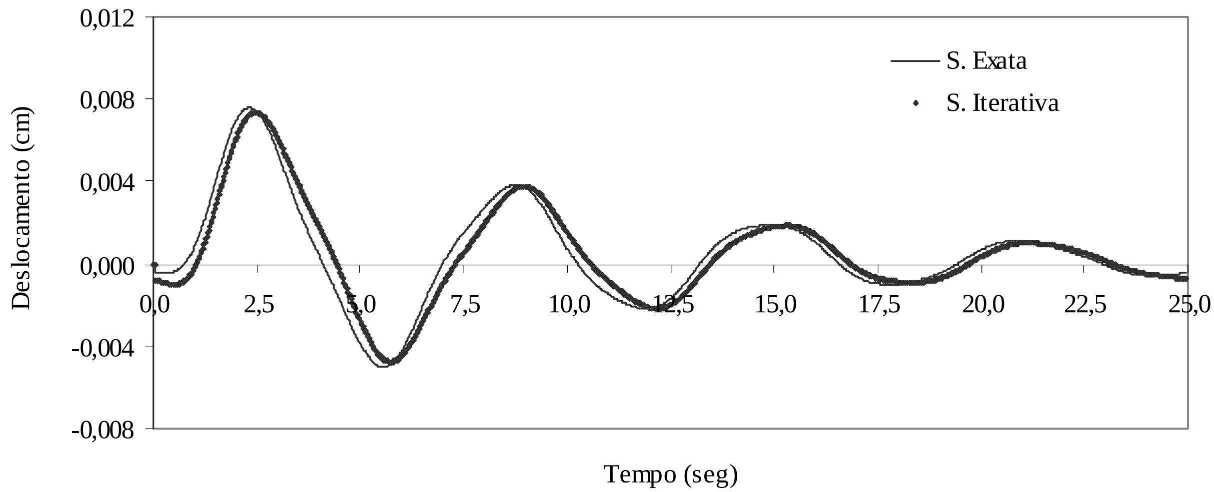


Figura 3: Deslocamento no tempo de $x_2(t)$

## 4. CONCLUSÕES

Um método simples para analisar sistemas dinâmicos foi apresentado na sua formulação, e avaliado através de um exemplo com dois graus de liberdade. O método exposto, de análise no domínio da freqüência na sua forma modal, apresenta-se como uma alternativa viável para a solução de sistemas dinâmicos com características de amortecimento não proporcional, reduzindo os tempos computacionais, sem por isso perder a qualidade da resposta. Tal método poderá ser usado em aplicações de computação paralela, pois o sistema de equações fica desacoplado, permitindo a solução independente de cada um dos graus de liberdade modal no domínio da freqüência.

## REFERÊNCIAS


Claret, A.M. & Venâncio Filho, F., 1991, *A Modal Superposition Method Pseudo-Force for Dynamic Analysis of Structural Systems with Non-proportional Damping*, Earthquake Engineering and Strucutural Dynamics, vol. 20, pp. 303-315.

Claret, A.M. & Venâncio Filho, F., 1996, *Frequency Domain Analysis with Application to Soil-Structure Interaction*, Advance in Computational Methods for Simulation, Civil-comp Presshquake Engineering and Strucutural Dynamics, pp. 177-187.

Clough, R.W. & Penzien, J., *Dynamics of Structures*. New York: McGraw-Hill, 1993.

Dimaragonas, A., *Vibration for Engineers*, Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

Ibrahimbegovic, A. & Wilson, E.L., *Simple Numerical Algorithms for the mode Superposition Analysis of Linear Strucutural Systems with Non-porportional Damping*, Computer & Structures, vol. 33, n. 2, pp. 523-531.

Monagan, M.B et Al., *Maple V Programing Guide*. New York: Springer Verlag's, 1996.

Redfern, D., *The Maple Handbook: Maple V Release 4*. New York: Springer Verlag's, 1996.

# TREATMENT OF SYSTEMS WITH NON PROPORTIONAL DAMPING IN THE FREQUENCY DOMAIN

***Summary.*** *Dynamic systems with proportional damping can be treated, to obtain its response, in the frequency or time domain. When damping is not proportional to mass or/and stiffness, the solution of the system can be achieved in a rigorous way if solved in frequency domain. These work presents an alternative method to treat dynamic systems with non proportional damping in frequency domain. For such, an iterative strategy with pseudo forces and a change from the physical coordinates of the system intime base to the modal coordinates in frequency domai were applied. The theoretical formulation is presented, as well as an example that validate its application for similar dynamic systems.*

***Keywords:*** *Non proportional damping, dynamic, response in frequency*